

I مرافق عدد عقدي - معيار عدد عقدي

تعريف

ليكن $z=x+yi$ عددا عقديا حيث x و y عددان حقيقيان. مرافق العدد z هو العدد العقدي $\bar{z} = x - yi$.

خاصية

لكل z و z' من C، ولكل n من IN، لدينا:

■ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ وبصفة عامة: $\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)} = \sum_{i=1}^{n} \bar{z_i}$ ■ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ وبصفة عامة: $\overline{\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right)} = \prod_{i=1}^{n} \bar{z_i}$

■ $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ ■ إذا كان: $z' \neq 0$، فإن: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$ و $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

نتائج

■ $z + \bar{z} = 2R_e(z)$ إذن: $\bar{z} = - z \Leftrightarrow z \in (iIR)$ ■ $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$، إذن: $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in IR$

■ $\bar{\bar{z}} = z$ ■ $\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$

تعريف

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

ليكن $z=x+yi$ عددا عقديا حيث x و y عددان حقيقيان.

معيار العدد العقدي z هو المسافة OM حيث $M(z)$ ويرمز له بالرمز $|z|$. ولدينا: $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

خاصيات المعيار

لكل z و z' من C ولكل n من IN،

لدينا: ■ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ بصفة عامة: $\left|\prod_{i=1}^{n} z_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |z_i|$ ■ $|z^n| = |z|^n$

■ إذا كان $z' \neq 0$، فإن: $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ و $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ■ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

نتائج

■ $|\bar{z}| = |-z| = |z|$ ■ $z\bar{z} = |z|^2$ ■ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

■ $|z| = |z'| \Leftarrow z = z'$ (الاستلزام العكسي غير صحيح). ■ $AB = |z_B - z_A|$



III عمدة عدد عقدي غير منعدم

تعريف

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$. ليكن z عددا عقديا غير منعدم.

نسمي عمدة العدد العقدي z، كل قياس بالراديان للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$ حيث M النقطة التي لحقها z ونكتب $\arg(z) \equiv (\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})[2\pi]$

ملحوظة: الصفر هو العدد العقدي الوحيد الذي لا يقبل عمدة.

خاصيات العمدة

لكل z و z' من $\mathbb{C}^*$ ولكل n من IN، لدينا:

- $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$ ■ $\arg\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\arg(z_i)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ ■ $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$ ■ $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$
- $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ ■ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

نتائج

- $z \in IR^{*+} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$ ■ $z \in IR^{*-} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$ ■ $z \in IR^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$

- ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}^*$

- $z \in (iIR) \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ■ $(\text{Im}(z) > 0$ و $z \in (iIR)) \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $(\text{Im}(z) < 0$ و $z \in (iIR)) \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$



شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم - الترميز الأسي

- $(|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \alpha[2\alpha\pi]) \Leftrightarrow z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ■ $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$
- علاقة موافر: لكل n من IN، لدينا: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$
- $\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$ ■ $(e^{i\alpha})^n = e^{i(n\alpha)}$ ■ $e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}$ ■ $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = e^{i(\alpha-\alpha')}$
- صيغتا أولير: $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ و $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$



المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية

المعادلة	$az^2+bz+c=0$ حيث $a \in IR^*$ و $(b;c) \in IR^2$		
المميز	$\Delta = b^2 - 4ac$		
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
الحلول	حلان حقيقيان: $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	حل وحيد: $z = -\frac{b}{2a}$	حلان عقديان مترافقان: $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

التمرين 1

1) اكتب العدد العقدي z على الشكل الجبري في كل حالة من الحالات الآتية:

أ- $z=(2+i)-3i(1-i)$ ب- $z=\left(\frac{2}{3}i-1\right)(3-6i)$

ج- $z=(1+i)^2-i^2$ د- $z=(1+i)^8$

2) اكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية

$a=\frac{3}{i}$ و $b=\frac{8}{2-3i}$ و $c=\frac{3i}{1+2i}$ و $d=\frac{5(1-i)^2}{3-4i}$ و $e=\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^2$

الحل

1) أ- الشكل الجبري للعدد العقدي: $z=(2+i)-3i(1-i)$

لدينا: $z=(2+i)-3i(1-i)=2+i-3i+3i^2$

إذن: $z=2+i-3i-3=-1-2i$ (لأن: $i^2=-1$)

ب- الشكل الجبري للعدد العقدي: $z=\left(\frac{2}{3}i-1\right)(3-6i)$

لدينا: $z=\left(\frac{2}{3}i-1\right)(3-6i)=\frac{2}{3}i\times 3-\frac{2}{3}i\times 6i-1\times 3+1\times 6i$

$=2i-4i^2-3+6i=2i+4-3+6i$

إذن: $z=1+8i$

ج- الشكل الجبري للعدد العقدي: $z=(1+i)^2-i^2$

لدينا: $z=(1+i)^2-i^2=1^2+2\times 1\times i+i^2-i^2$ ، ومنه: $z=1+2i$

د- الشكل الجبري للعدد العقدي $z=(1+i)^8$

لدينا: $z=(1+i)^8=((1+i)^2)^4$ ومنه: $z=(1+i^2+2i)^4$

وبما أن: $i^2=-1$ فإن: $z=(2i)^4=2^4\times i^4=16\times(i^2)^2$ ومنه: $z=16$ (لأن: $(i^2)^2=(-1)^2=1$)

2) الشكل الجبري للعدد العقدي a.

لدينا: $a=\frac{3}{i}=\frac{3}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{3i}{-1}$ ومنه: $a=-3i$

• الشكل الجبري للعدد العقدي b

لدينا: $b=\frac{8}{2-3i}=\frac{8(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$ ، ومنه: $b=\frac{16+24i}{2^2-(3i)^2}$

وبما أن: $(3i)^2=-9$ فإن: $b=\frac{16+24i}{13}$ ، إذن: $b=\frac{16}{13}+\frac{24}{13}i$

• الشكل الجبري للعدد c:

لدينا: $c=\frac{3i}{1+2i}=\frac{3i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3i+6}{1^2-(2i)^2}=\frac{6+3i}{5}$ إذن: $c=\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i$

• الشكل الجبري للعدد العقدي d:

لدينا: $d=\frac{5(1-i)^2}{3-4i}=\frac{5(1-i)^2(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$ ، وبما أن: $(1-i)^2=1-2i-1=-2i$

فإن: $d=\frac{-10i(3+4i)}{3^2-(4i)^2}$ أي: $d=\frac{-30i-40i^2}{25}$، إذن: $d=\frac{40}{25}-\frac{30}{25}i$ ومنه: $d=\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i$

• الشكل الجبري للعدد العقدي e:

لدينا: $e=\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^2=\left(\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^2=\left(\frac{6-3i-2i-1}{4+1}\right)^2=\left(\frac{5-5i}{5}\right)^2$
$=(1-i)^2$

وبما أن: $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$ فإن: $e=-2i$

التمرين 2

1) تحقق من المتساويتين التاليتين: $1+i+i^2+i^3=0$ و $(i-1)^4=-4$

2) حدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد z في كل حالة من الحالات التالية:

أ- $z=(1-2i)^3$ ؛ ب- $z=\frac{(1+\sqrt{2})-i}{(1+\sqrt{2})+i}$

ج- $z=\frac{3-6i}{3+i}+\frac{4}{3-i}$ ؛ د- $z=\left(\frac{4-6i}{3+2i}\right)\left(\frac{1+3i}{3-2i}\right)$

الحل

1) التحقق من المتساوية $1+i+i^2+i^3=0$

لدينا: $i^2=-1$ و $i^3=i^2\times i=-i$

إذن: $1+i+i^2+i^3=1+i-1-i=0$، وبالتالي: $1+i+i^2+i^3=0$

• التحقق من المتساوية: $(i-1)^4=-4$

لدينا: $(i-1)^4=((i-1)^2)^2$

وبما أن: $(i-1)^2=i^2-2i+1$ و $i^2=-1$ ، فإن: $(i-1)^4=(-2i)^2=4i^2$

إذن: $(i-1)^4=-4$

2) لنحدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد z في كل حالة.

أ- $z=(1-2i)^3$

لدينا: $z=(1-2i)^3$
$=1^3-3\times1^2\times(2i)+3\times1\times(2i)^2-(2i)^3$
$=1-6i+3\times(-4)-(-8i)$
$=1-6i-12+8i=-11+2i$

تذكر أن:
$((a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

وبالتالي $Re(z)=-11$ و $Im(z)=2$

ب- $z=\frac{(1+\sqrt{2})-i}{(1+\sqrt{2})+i}$

لدينا:

$$z=\frac{\left((1+\sqrt{2})-i\right)\left((1+\sqrt{2})-i\right)}{\left((1+\sqrt{2})+i\right)\left((1+\sqrt{2})-i\right)}=\frac{\left((1+\sqrt{2})-i\right)^2}{(1+\sqrt{2})^2-i^2}=\frac{(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})i+i^2}{(1+\sqrt{2})^2+1}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})^2-1}{(1+\sqrt{2})^2+1}-\frac{2(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})^2+1}i=\frac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}-\frac{2(1+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}i$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}-\frac{2(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}i=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

وبالتالي: $\mathrm{Re}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\mathrm{Im}(z)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج- $z=\frac{3-6i}{3+i}+\frac{4}{3-i}$

لدينا: $z=\frac{(3-6i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}+\frac{4(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{9-3i-18i-6+12+4i}{10}$

$=\frac{15-17i}{10}=\frac{15}{10}-\frac{17}{10}i$

إذن: $\mathrm{Re}(z)=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$ و $\mathrm{Im}(z)=-\frac{17}{10}$

د- $z=\left(\frac{4-6i}{3+2i}\right)\left(\frac{1+3i}{3-2i}\right)$

لدينا: $z=\frac{4-6i}{3+2i}\times\frac{1+3i}{3-2i}=\frac{(4-6i)(1+3i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{4+12i-6i+18}{9+4}$

$=\frac{22}{13}+\frac{6i}{13}$

إذن: $\mathrm{Re}(z)=\frac{22}{13}$ و $\mathrm{Im}(z)=\frac{6}{13}$

التمرين 3

نعتبر العددين العقديين: $z_1=\frac{3-7i}{9+2i}$ و $z_2=\frac{3+7i}{9-2i}$

اكتب على الشكل الجبري كلا من الأعداد العقدية التالية:

أ- z_1+z_2 ؛ ب- $z_1\times z_2$ ؛ ج- $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$

الحل

أ- كتابة z_1+z_2 على الشكل الجبري

لدينا: $z_1+z_2=\frac{3-7i}{9+2i}+\frac{3+7i}{9-2i}=\frac{(3-7i)(9-2i)+(3+7i)(9+2i)}{(9+2i)(9-2i)}$

$=\frac{27-14-i(6+63)+27-14+i(6+63)}{81+4}=\frac{26}{85}$

ب- كتابة $z_2 \times z_1$ على الشكل الجبري.

لدينا: $z_1 \times z_2 = \left(\frac{3-7i}{9+2i}\right) \times \left(\frac{3+7i}{9-2i}\right) = \frac{(3-7i)(3+7i)}{(9+2i)(9-2i)} = \frac{9+49}{81+4} = \frac{58}{85}$

ج- $\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}$ على الشكل الجبري

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \times z_2} = \frac{26}{85} \times \frac{85}{58} = \frac{26}{58} = \frac{13}{29}$$

التمرين 4

نضع: $Z_1=3+2i$ ؛ $Z_2=-1+3i$ ؛ $Z_3=1-i$

1) احسب $Re(Z_1+Z_2+Z_3)$ ؛ $Re(iZ_1)$ و $\text{Re}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)$

2) احسب $Im(Z_1Z_2)$ و $\text{Im}\left(Z_1 - 2Z_2 + \frac{1}{2}Z_3\right)$

الحل

1) لدينا: $Z_3=1-i$ و $Z_2=-1+3i$ و $Z_1=3+2i$

ومنه:

- $Z_1+Z_2+Z_3=3+4i$
- $iZ_1=3i-2=-2+3i$
- $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{-1+3i}{3+2i} = \frac{(-1+3i)(3-2i)}{3^2+2^2} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$

وبالتالي: $\text{Re}(Z_1+Z_2+Z_3) = 3$ ؛ $\text{Re}(iZ_1) = -2$ ؛ $\text{Re}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right) = \frac{3}{13}$

2) لدينا: $Z_1Z_2=(3+2i)(-1+3i)=-9+7i$

و $Z_1 - 2Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 = 3 + 2i + 2 - 6i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{11}{2} - \frac{9}{2}i$

ومنه: $\text{Im}\left(Z_1 - 2Z_2 + \frac{1}{2}Z_3\right) = \frac{-9}{2}$ و $Im(Z_1Z_2)=7$

التمرين 5

لكل عدد عقدي z، نضع: $f(z)=z^2-z$ ، ولكل عدد عقدي z مخالف للعدد i نضع: $g(z) = \frac{z+1}{z-i}$

ليكن $z=x+iy$ حيث $(x;y) \in IR^2$ و $(x;y) \neq (0;1)$

حدد بدلالة x و y؛ $Re(f(z))$ و $Im(f(z))$ و $Re(g(z))$ و $Im(g(z))$

الحل

ليكن z من $\mathbb{C}$ بحيث $z=x+iy$ مع $(x;y) \in IR^2$

- لدينا: $f(z)=z^2-z$

$$f(z)=(x+iy)^2-(x+iy)=x^2+2ixy-y^2-x-iy=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y)$$

بما أن: $x^2-y^2-x \in IR$ و $2xy-y \in IR$ فإن: $Re(f(z))=x^2-y^2-x$ و $Im(f(z))=2xy-y$

• لدينا:

$$g(z)=\frac{z+1}{z-i}=\frac{x+iy+1}{x+iy-i}=\frac{(x+1)+iy}{x+i(y-1)}$$

$$=\frac{[(x+1)+iy][x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{x(x+1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{-(x+1)(y-1)+xy}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2}$$

بما أن: $\frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2} \in IR$ و $\frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2} \in IR$ (لأن $(x;y)\neq(0;1)$)

فإن: $\mathrm{Re}(g(z))=\frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2}$ و $\mathrm{Im}(g(z))=\frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2}$

التمرين 6

نضع لكل $n \in IN$؛ $S_n=1+i+i^2+\ldots+i^n$

1) أ- بين أن: $(\forall n \in IN); S_n-iS_n=1-i^{n+1}$

ب- استنتج أن: $S_n=\frac{1-i^{n+1}}{1-i}$

2) بسط S_n في الحالات التالية: $n=4p$ ؛ $n=4p+1$ ؛ $n=4p+2$ و $n=4p+3$ حيث $p \in IN$.

الحل

1) أ- لنبين أن: $S_n-iS_n=1-i^{n+1}$

ليكن n عنصرا من IN، لدينا: $\left.\begin{array}{l} S_n=1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{n-1}+i^n \\ -iS_n=-i-i^2-i^3-\ldots-i^n-i^{n+1}\end{array}\right\}$

بجمع طرفي هاتين المتساويتين ،وبعد الاختزال نحصل على: $S_n-iS_n=1-i^{n+1}$

إذن: $(\forall n \in IN); S_n-iS_n=1-i^{n+1}$

ب- لنستنتج أن: $S_n=\frac{1-i^{n+1}}{1-i}$

ليكن n عنصراً من IN، لدينا: $S_n-iS_n=1-i^{n+1}$ ، إذن: $(1-i)S_n=1-i^{n+1}$ ، ومنه: $S_n=\frac{1-i^{n+1}}{1-i}$

2) لنبسط S_n

ليكن n عنصرا من IN، لدينا: $S_n=\frac{1-i^{n+1}}{1-i}$

– حالة: $n=4p$ حيث $p \in IN$، لدينا: $n=4p$، إذن: $i^{n+1}=i^{4p+1}=(i^4)^p\times i=1^p\times i=i$

ومنه: $S_n=\frac{1-i}{1-i}=1$

- حالة: $n=4p+1$ حيث $p \in IN$، لدينا: $n=4p+1$، إذن: $i^{n+1} = i^{4p+2} = (i^4)^p \times i^2 = -1$

إذن: $S_n = \frac{1+1}{1-i} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$

- حالة: $n=4p+2$ حيث $p \in IN$، لدينا: $n=4p+2$ ، إذن: $i^{n+1} = i^{4p+3} = i^{4p+2} \times i = -i$

إذن: $S_n = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$

- حالة: $n=4p+3$ حيث $p \in IN$،

لدينا: $n=4p+3$،

إذن: $i^{n+1} = i^{4p+4} = i^{4p+3} \times i = -i \times i = 1$

إذن: $S_n = \frac{1-1}{1-i} = 0$

خلاصة:

$$\begin{cases} S_n = 1 & ;n = 4p \\ S_n = 1+i & ;n = 4p+1 \\ S_n = i & ;n = 4p+2 \\ S_n = 0 & ;n = 4p+3 \end{cases} \quad ;(p \in IN)$$

التمرين 7

احسب مرافق كل عدد عقدي من الأعداد العقدية التالية: $z_1=-9$ و $z_2=-i$ و $z_3 = 2i\sqrt{3}$
و $z_4 = \frac{1-i\sqrt{2}}{i}$ و $z_5 = (\sqrt{3}-i)^4$ و $z_6=(1+i)^n$ و $z_7=(1-i)^n$ حيث $(n \in IN)$

الحل

لنحدد مرافق كل عدد عقدي من الأعداد السابقة:

$\overline{z_1} = -\overline{9} = \overline{-9+0i} = -9-0i = -9 = z_1$

$\overline{z_2} = -\overline{i} = \overline{0-1i} = 0+1i = i = -z_2$

لاحظ أن: $(\forall z \in iIR); \overline{z} = -z$

(لأن: $\overline{z_3} = -z_3$ ($z_3 \in iIR$

$\overline{z_4} = \overline{\left(\frac{1-i\sqrt{2}}{i}\right)} = \frac{\overline{1-i\sqrt{2}}}{\overline{i}} = \frac{1+i\sqrt{2}}{-i} = \frac{-1}{i} - \frac{i\sqrt{2}}{i} = \frac{i^2}{i} - \sqrt{2}$
$= -\sqrt{2} + i$

تذكر: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$\overline{z_5} = \overline{(\sqrt{3}-i)^4} = (\overline{\sqrt{3}-i})^4 = (\sqrt{3}+i)^4$

$\overline{z_6} = \overline{(1+i)^n} = (\overline{1+i})^n = (1-i)^n$

$\overline{z_7} = \overline{(1-i)^n} = (\overline{1-i})^n = (1+i)^n$

تذكر: $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$ لكل n من IN

التمرين 8

نضع $z_1 = \frac{4-i}{3+2i}$ و $z_2 = \frac{4+i}{3-2i}$

بين أن: $z_1 + z_2 \in IR$ و $(z_1 - z_2) \in iIR$ دون اللجوء إلى الحساب.

الحل

لدينا: $\overline{z_2} = \overline{\left(\frac{4+i}{3-2i}\right)} = \frac{\overline{(4+i)}}{\overline{(3-2i)}} = \frac{4-i}{3+2i} = z_1$

ومنه: $z_1 + z_2 = \overline{z_2} + z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_2)$ و $z_1 - z_2 = \overline{z_2} - z_2 = -2i\,\mathrm{Im}(z_2)$

إذن: $z_1 + z_2 \in IR$ و $z_1 - z_2 \in iIR$

التمرين 9

لكل عدد عقدي z، نضع $f(z)=4z^2+z+3$

1) احسب $f(1+i)$ و $f(i)$

2) بين أن: $(\forall z \in \mathbb{C});\overline{f(z)} = f(\overline{z})$

3) استنتج $f(1-i)$ و $f(-i)$

الحل

1) حساب $f(1+i)$ و $f(i)$

لدينا: $f(z)=4z^2+z+3$

إذن: $f(1+i)=4(1+i)^2+(1+i)+3$ و $f(i)=4i^2+i+3$

أي: $f(1+i) = 4 \times 2i + 1 + i + 3$ و $f(i)=-4+i+3$

$f(1+i)=4+9i$ و $f(i)=-1+i$

2) لنبين أن: $(\forall z \in \mathbb{C});\overline{f(z)} = f(\overline{z})$

ليكن z من $\mathbb{C}$

لدينا: $f(z)=4z^2+z+3$، إذن $\overline{f(z)} = \overline{4z^2 + z + 3}$

أي: $\overline{f(z)} = \overline{4z^2} + \overline{z} + \overline{3} = 4\overline{z}^2 + \overline{z} + 3 = f(\overline{z})$ (لأن: $\overline{4} = 4$ و $\overline{3} = 3$ و $\overline{z^2} = \overline{z}^2$)

ومنه: $(\forall z \in \mathbb{C});\overline{f(z)} = f(\overline{z})$

3) استنتاج: $f(1-i)$ و $f(-i)$

لدينا: $f(1-i) = f(\overline{1+i})$ (لأن $\overline{1+i} = 1-i$)

ومنه: $f(1-i) = \overline{f(1+i)}$

أي: $f(1-i) = \overline{4+9i}$ (لأن: $f(1+i)=4+9i$)، وبالتالي: $f(1-i)=4-9i$

ولدينا: $f(-i) = f(\overline{i}) = \overline{f(i)} = (\overline{-1+i}) = -1-i$

إذن: $f(-i)=-1-i$

التمرين 10

ليكن a من IR^*

نضع لكل n من IN: $u = (1 + ia)^n + (1 - ia)^n$

$v = (a + i)^n - (a - i)^n$

بين أن: u عدد حقيقي وv عدد تخيلي صرف

الحل

• لنبين أن u حقيقي وأن v تخيلي صرف

لدينا: a من IR^* و n من IN

لدينا:

$$\bar{u} = \overline{(1 + ia)^n + (1 - ia)^n}$$
$$= \overline{(1 + ia)^n} + \overline{(1 - ia)^n}$$
$$= (\overline{1 + ia})^n + (\overline{1 + ia})^n = (1 - ia)^n + (1 + ia)^n = u$$

تذكر أن:

$u \in IR \Leftrightarrow \bar{u} = u$

$v \in iIR \Leftrightarrow \bar{u} = -u$

ومنه: u عدد حقيقي

لدينا: $\bar{v} = \overline{(a + i)^n - (a - i)^n} = \overline{(a + i)^n} - \overline{(a - i)^n}$

$$= (\overline{a + i})^n - (\overline{a - i})^n = (a - i)^n - (a + i)^n$$

ومنه: $\bar{v} = -\left((a + i)^n - (a - i)^n\right) = -v$ ، إذن: v عدد تخيلي صرف.

التمرين 11

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية:

1) $iz-1=z+3i$ (E) 2) $\frac{z+1}{z-i} = i$ (F)

3) $\frac{z-i}{iz+2} = 2i$ (G) 4) $3z + \bar{z} = 1 - i$ (H)

الحل

1) لنحدد z بحيث $iz-1=z+3i$

ليكن z من $\mathbb{C}$، لدينا: $iz - 1 = z + 3i \Leftrightarrow iz - z = 1 + 3i$

$$\Leftrightarrow z(i - 1) = 1 + 3i$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + 3i}{-1 + i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{(1 + 3i)(-1 - i)}{(-1)^2 + 1^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 - i - 3i - 3i^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{2 - 4i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 1 - 2i$$



إذن حل المعادلة (E) هو العدد العقدي $z=1-2i$ ، ومنه $S=\{1-2i\}$

2) لنحل المعادلة: $\frac{z+1}{z-i}=i$ $\quad (F)$

شروط وجود المعادلة: $z-i\neq 0$ ، أي: $z\neq i$

ليكن z من $\mathbb{C}-\{i\}$، لدينا: $\frac{z+1}{z-i}=i \Leftrightarrow z+1=iz-i^2$

$$\Leftrightarrow z(1-i)=0$$

$$\Leftrightarrow z=0$$ (لأن: $1-i\neq 0$)

ومنه: $S=\{0\}$

3) لنحل المعادلة: $\frac{z-i}{iz+2}=2i$ $\quad (G)$

شروط وجود المعادلة (G):

$$D=\{z\in\mathbb{C}\ /iz+2\neq 0\}$$

وبما أن: $iz+2=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{C}$ و $z=-\frac{2}{i}$

$$\Leftrightarrow z\in\mathbb{C} \text{ و } z=2i$$

فإن: $D=\mathbb{C}-\{2i\}$

ليكن z من $\mathbb{C}-\{2i\}$ ، لدينا: $\frac{z-i}{iz+2}=2i \Leftrightarrow z-i=2i(iz+2)$

$$\Leftrightarrow z-i=-2z+4i$$

$$\Leftrightarrow 3z=5i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{5}{3}i$$

لدينا: $\frac{5}{3}i\in D$، إذن: $S=\left\{\frac{5}{3}i\right\}$

4) لنحل المعادلة: $3z+\bar{z}=1-i$ $\quad (H)$

ليكن z من $\mathbb{C}$ ، نضع $z=x+iy$، حيث $(x;y)\in IR^2$

لدينا: $3z+\bar{z}=1-i \Leftrightarrow 3(x+iy)+(x-iy)=1-i$

$$\Leftrightarrow 4x+i(2y)=1-i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x=1\\2y=-1\end{cases}$$ (لأن $4x\in IR$ و $2y\in IR$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$



تذكر أن:

لكل a و a' و b و b' من IR،

$a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'$ و $b=b'$

إذن العدد العقدي z الوحيد الذي يحقق المعادلة (H)

هو: $z=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i$ ومنه: $S=\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\right\}$

التمرين 12

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية:

أ- $2z+1-i=iz+2$ ب- $(1+i)z=3-i$

ج- $\frac{z+1}{z-1}=2i$ د- $(2z+1-i)(iz+3)=0$

2) حل في $\mathbb{C}^2$ النظمة التالية: $\begin{cases} 2z_1+(1-i)z_2=-2+2i \\ z_1-z_2=-1 \end{cases}$

الحل

أ- لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $2z+1-i=iz+2$

ليكن z من $\mathbb{C}$، لدينا:

$$2z+1-i=iz+2 \Leftrightarrow (2-i)z=1+i$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{1+i}{2-i}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

ومنه: $S=\left\{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right\}$

ب- لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(1+i)z=3-i$

ليكن z من $\mathbb{C}$، لدينا:

$$(1+i)z=3-i \Leftrightarrow z=\frac{3-i}{1+i}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{2-4i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=1-2i$$

ومنه $S=\{1-2i\}$

ج- لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $\frac{z+1}{z-1}=2i$

المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان $z\neq 1$

ليكن z مخالفا للعدد 1، لدينا:

$$\frac{z+1}{z-1}=2i \Leftrightarrow z+1=2i(z-1)$$
$$\Leftrightarrow z(1-2i)=-2i-1$$
$$\Leftrightarrow z=-\frac{1+2i}{1-2i}$$
$$\Leftrightarrow z=-\frac{(1+2i)^2}{1+4}$$
$$\Leftrightarrow z=-\frac{-3+4i}{5}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

وبما أن: $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\neq 1$ فإن حل المعادلة هو: $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ ومنه $S=\left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right\}$

د- لنحل المعادلة $(2z+1-i)(iz+3)=0$

ليكن z من $\mathbb{C}$: $(2z+1-i)(iz+3)=0 \iff 2z+1-i=0$ أو $iz+3=0$

$$\iff z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \text{ أو } z=-\frac{3}{i}$$

$$\iff z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \text{ أو } z=\frac{3i^2}{i}$$

$$\iff z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \text{ أو } z=3i$$

ومنه حلا المعادلة هما العددان العقديان $3i$ و $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ، إذن: $S=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i;3i\right\}$

2) لنحل في $\mathbb{C}^2$ النظمة: $\begin{cases}2Z_1+(1-i)Z_2=-2+2i\\ Z_1-Z_2=-1\end{cases}$

$$\begin{cases}2z_1+(1-i)z_2=-2+2i & :(1)\\ z_1-z_2=-1 & :(2)\end{cases} \iff \begin{cases}2z_1+(1-i)z_2=-2+2i & (1)\\ -2z_1+2z_2=2 & (2)'\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}z_2(2+1-i)=2i & (1)+(2)'\\ z_1=z_2-1 & (2)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}z_2=\frac{2i}{3-i}=\frac{2i(3+i)}{10}\\ z_1=z_2-1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}z_2=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\\ z_1=-\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}z_1=-\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i\\ z_2=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\end{cases}$$

إذن حل النظمة هو الزوج $\left(-\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i;-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right)$

التمرين 13

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين:

(1) $2iz+\bar{z}=1-2i$

(2) $(1+i)z-(1-2i)\bar{z}=2z+i\bar{z}$

الحل

• لنحل المعادلة $(1)\, 2iz + \bar{z} = 1 - 2i$

ليكن z من $\mathbb{C}$، نضع: $z=x+iy$، حيث $(x;y) \in IR^2$

لدينا: $2iz + \bar{z} = 1 - 2i \iff 2i(x + iy) + (x - iy) = 1 - 2i$

$\iff 2ix - 2y + x - iy = 1 - 2i$

$\iff x - 2y + i(2x - y) = 1 - 2i$

وبما أن: $x - 2y \in IR$ و $2x - y \in IR$ فإن:

$$(1) \iff \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2y \\ 2(1 + 2y) - y = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

إذن: $S = \left\{-\frac{5}{3} - \frac{4}{3}i\right\}$

• لنحل المعادلة: $(2)\,(1 + i)z - (1 - 2i)\bar{z} = 2z + i\bar{z}$

ليكن z من $\mathbb{C}$، نضع $z=x+iy$ حيث $(x,y) \in IR^2$

$(2) \iff (1 + i)(x + iy) - (1 - 2i)(x - iy) = 2(x + iy) + i(x - iy)$

$\iff x + iy + ix - y - (x - iy - 2ix - 2y) = 2x + 2iy + ix + y$

$\iff \not{x} + iy + ix - y - \not{x} + iy + 2ix + 2y = 2x + y + i(2y + x)$

$\iff y + i(3x + 2y) = 2x + y + i(x + 2y)$

$$\iff \begin{cases} y = 2x + y \\ 3x + 2y = x + 2y \end{cases}$$ (لأن: $x+2y$ و $2x+y$ و $3x+2y$ و y أعداد حقيقية)

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 0y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y \in IR \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة (2) هي جميع الأعداد العقدية التي تكتب على الشكل iy حيث $y \in IR$

ومنه: $S = \{iy / y \in IR\}$ أي: $S=iIR$

التمرين 14

ليكن z عددا عقديا غير منعدم؛

بين أن: $\frac{2z-1}{z^2} \in IR \iff (z=\bar{z}$ أو $z+\bar{z}=2z\bar{z})$

الحل

ليكن z من $\mathbb{C}^*$، نضع: $Z=\frac{2z-1}{z^2}$

لنبين أن: $Z \in IR \iff (z=\bar{z}$ أو $z+\bar{z}=2z\bar{z})$

لدينا: $\bar{Z}=\overline{\left(\frac{2z-1}{z^2}\right)}=\frac{\overline{2z-1}}{\overline{z^2}}=\frac{2\bar{z}-1}{\bar{z}^2}$

ومنه: $Z \in IR \iff Z=\bar{Z}$

$$\iff \frac{2z-1}{z^2}=\frac{2\bar{z}-1}{\bar{z}^2}$$

$$\iff \bar{z}^2(2z-1)=z^2(2\bar{z}-1)$$

$$\iff 2z\bar{z}^2-\bar{z}^2=2z^2\bar{z}-z^2$$

$$\iff 2z\bar{z}^2-2z^2\bar{z}-(\bar{z}^2-z^2)=0$$

$$\iff 2z\bar{z}(\bar{z}-z)-(\bar{z}-z)(\bar{z}+z)=0$$

$$\iff (\bar{z}-z)(2z\bar{z}-\bar{z}-z)=0$$

$\iff \bar{z}-z=0$ أو $2z\bar{z}-\bar{z}-z=0$

$\iff z=\bar{z}$ أو $2z\bar{z}=z+\bar{z}$

إذن: $\frac{2z-1}{z^2} \in IR \iff (z=\bar{z}$ أو $z+\bar{z}=2z\bar{z})$

التمرين 15

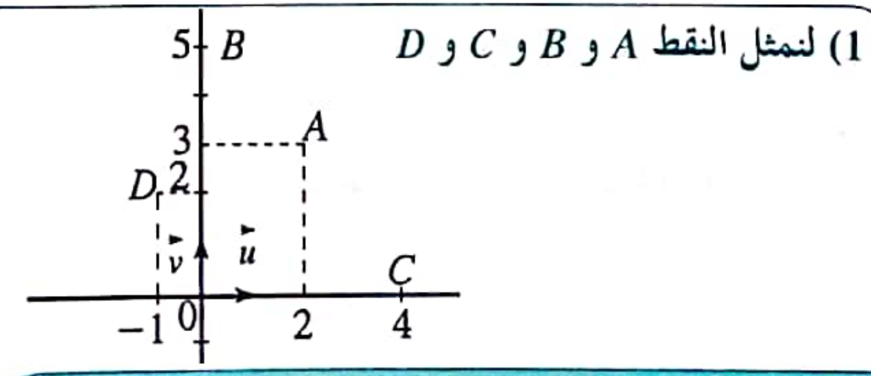
1) مثل في المستوى العقدي النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي: $z_A=2+3i$ و $z_B=5i$ و $z_C=4$ و $z_D=-1+2i$.

2) أ- حدد z_I لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$

ب- حدد z_J لحق النقطة J التي تحقق: $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

الحل

1) لنمثل النقط A و B و C و D





2) أ- لنحدد z_I

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$، إذن: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ ، أي: $z_I = \frac{2 + 3i + 5i}{2} = \frac{2 + 8i}{2} = 1 + 4i$

ب- لنحدد z_J

لدينا: $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$، إذن: $z_J - z_C = \frac{1}{2}(z_D - z_C)$

ومنه: $z_J = \frac{1}{2}(-1 + 2i - 4) + 4 = \frac{3}{2} + i$

التمرين 16

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي: $a=2-i$ و $b=3+2i$ و $c=-1+4i$ و $d=-2+i$

1) بين أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

2) حدد لحق النقطة E بحيث يكون $ADBE$ متوازي أضلاع.

الحل

1) لنبين أن $ABCD$ متوازي أضلاع

لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو العدد العقدي $b-a$، أي: $b-a=3+2i-(2-i)=3+2i-2+i=1+3i$

لحق المتجهة $\overrightarrow{DC}$ هو العدد العقدي $c-d$، أي: $c-d=-1+4i-(-2+i)=-1+4i+2-i=1+3i$

إذن $b-a=c-d$ ، يعني أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ، وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

2) تحديد لحق النقطة E

ليكن العدد العقدي e لحق النقطة E.

لدينا $ADBE$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EB}$

لحق المتجهة $\overrightarrow{AD}$ هو العدد العقدي $d-a$، أي: $d-a=-2+i-(2-i)=-2+i-2+i=-4+2i$

لحق المتجهة $\overrightarrow{EB}$ هو العدد العقدي، $b-e=3+2i-e$

إذن: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EB} \Leftrightarrow -4 + 2i = 3 + 2i - e$

$\Leftrightarrow e = 7$

يعني أن لحق النقطة E هو العدد 7.

التمرين 17

في كل مايلي المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

نعتبر النقط $A(-3+4i)$ و $B(-1+i)$ و $C(3+i)$



1) حدد لحق كل من المتجهات $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{BC}$ ؛ $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

2) حدد لحق النقطة I منتصف $[BC]$، والنقطة G مرجح $\{(A,1),(B,2),(C,-5)\}$

3) حدد لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

الحل

1) لنحدد لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ ، ومنه لحقها يساوي: $2-3i$

- لنحدد لحق المتجهة $\overrightarrow{BC}$.

لدينا $z_C - z_B$ هو لحق المتجهة $\overrightarrow{BC}$ ومنه لحقها يساوي: 4

- لنحدد لحق المتجهة $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

لدينا $2(z_B - z_A) - 3(z_C - z_A)$ هو لحق المتجهة $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ ومنه لحقها يساوي: $-14+3i$

2) • لنحدد z_I لحق النقطة I منتصف القطة $[BC]$

لدينا: $z_I = \dfrac{z_B + z_C}{2}$ ومنه: $z_I = 1+i$

- لنحدد z_G لحق النقطة G مرجع النظمة المتزنة $\{(A,1),(B,2),(C,-5)\}$

لدينا: $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{OC}$ ، ومنه: $z_G = -\frac{1}{2}z_A - z_B + \frac{5}{2}z_C$

إذن: $z_G = 10 - \frac{1}{2}i$

3) لنحدد z_D لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

$$(ABCD \text{ متوازي أضلاع}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$$
$$\Leftrightarrow z_D = z_C + z_A - z_B$$
$$\Leftrightarrow z_D = 3 + i - 3 + 4i + 1 - i = 1 + 4i$$

إذن لحق النقطة D هو: $z_D = 1+4i$

التمرين 18

لتكن النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي: $z_A = 1-i$ ؛ $z_B = 2+i$ ؛ $z_C = \frac{1}{2} - 2i$

بين أن النقط A و B و C نقط مستقيمية.

الحل



لنبين أن: النقط A و B و C مستقيمية

تذكر :
لتكن A و B و C ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى.
A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كان $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in IR$

لدينا: $z_B - z_A = 2 + i - (1 - i) = 1 + 2i$

و $z_C - z_A = \frac{1}{2} - 2i - (1 - i) = -\frac{1}{2} - i = -\frac{1}{2}(1 + 2i)$

إذن: $z_C - z_A = -\frac{1}{2}(z_B - z_A)$، أي: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -\frac{1}{2}$ ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in IR$

وبالتالي النقط A و B و C مستقيمية.

التمرين 19

اكتب العدد العقدي z على الشكل الجبري، ثم حدد $\bar{z}$ واحسب $|z|$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $z=4i+3(1-i)$ ؛ 4) $z=(1+i)^4$

2) $z=(1+i)(1-4i)$ ؛ 5) $z = \frac{2+i}{(3+i)(2i-1)}$

3) $z = \frac{4}{2+i}$ ؛ 6) $z = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3(i-2)}$

الحل

1) لدينا: $z = 4i+3(1-i) = 4i+3-3i$ ، إذن: $z=3+i$

• مرافق z هو: $\bar{z} = 3 - i$، و معيار z هو: $|z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

2) لدينا: $z = (1+i)(1-4i) = 1-4i+i+4$ إذن: $z=5-3i$

• مرافق z هو: $\bar{z} = 5 + 3i$ و معيار z هو: $|z| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

3) لدينا: $z = \frac{4}{2+i} = \frac{4(2-i)}{2^2+1^2}$ ، إذن: $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$

• مرافق z هو: $\bar{z} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$، و معيار z هو: $|z| = \left|\frac{8}{5} - \frac{4}{5}i\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

4) لدينا: $z = (1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2$ ، إذن: $z=-4$

• مرافق z هو: $\bar{z} = -4 = z$ ، و معيار z هو: $|z| = |-4| = 4$

5) لدينا:
$$z=\frac{2+i}{(3+i)(2i-1)}=\frac{2+i}{6i-3-2-i}=\frac{2+i}{-5+5i}$$
$$=\frac{(2+i)(-5-5i)}{(-5)^2+(5)^2}=\frac{-10-10i-5i+5}{50}=\frac{-5-15i}{50}$$

إذن: $z=-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$

• مرافق z هو: $\bar{z}=-\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$ و معيار z هو: $|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2+\left(-\frac{3}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

6) لدينا:
$$z=\frac{(1-i)^2}{(1+i)^3(i-2)}=\frac{-2i}{(1+i)^2(1+i)(i-2)}=\frac{-2i}{2i(1+i)(i-2)}$$
$$=\frac{-2i}{(2i-2)(i-2)}=\frac{-2i}{-2-4i-2i+4}=\frac{-2i}{2-6i}$$
$$=\frac{-2i(2+6i)}{(2-6i)(2+6i)}=\frac{-4i+12}{4+36}$$

إذن: $z=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$

• مرافق العددz هو: $\bar{z}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$ و معيار العددz هو: $|z|=\left|\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

التمرين 20

احسب معيار كل عدد من الأعداد الآتية:

$z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ ؛ $z_2=6i$ ؛ $z_3=(1-i)^{10}$ ؛ $z_4=\frac{3-4i}{i\sqrt{5}}$

$z_5=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2008}$ ؛ $z_6=\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha$ ؛ $z_7=1+i\tan\alpha\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$z_8=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ ؛ $-\pi\leq\alpha\leq\pi$

الحل

• معيار z_1: $|z_1|=|\sqrt{2}-i\sqrt{6}|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=\sqrt{2+6}=\sqrt{8}$

• معيار z_2: $|z_2|=|-6i|=|-6|\times|i|=6\times 1=6$

• معيار z_3: $|z_3|=|(1-i)^{10}|=|1-i|^{10}=\left(\sqrt{1+1}\right)^{10}=2^5=32$

• معيار z_4: $|z_4|=\left|\frac{3-4i}{i\sqrt{5}}\right|=\frac{|3-4i|}{|i\sqrt{5}|}=\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{5}|i|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

• معيار z_5:
$$|z_5|=\left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2008}\right|=\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|^{2008}=\left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|}\right)^{2008}=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=(\sqrt{2})^{2008}=2^{1004}$$

• معيار z_6: $|z_6|=|\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha|=\sqrt{\cos^2(2\alpha)+\sin^2(2\alpha)}=1$

• معيار z_7: ليكن α عنصرا من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$، $|z_7| = |1 + i\tan\alpha| = \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$

$$= \frac{1}{|\cos\alpha|}$$

وبما أن: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$، فإن $\cos\alpha > 0$، ومنه: $|z_7| = \frac{1}{\cos\alpha}$

• معيار z_8: ليكن α عنصرا من $[-\pi;\pi]$

$$|z_8| = |1+\cos\alpha+\sin\alpha| = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} = \sqrt{1+2\cos\alpha+\cos^2+\sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt{2(1+\cos\alpha)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$|z_8| = 2\left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|$$

وبما أن: $-\pi \le \alpha \le \pi$، فإن $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{\pi}{2}$

إذن: $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ge 0$، ومنه $|z_8| = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

تذكر أن:

$1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

التمرين 21

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا، بحيث a و b عددان حقيقيان و $a \neq 0$.

حدد بدلالة a و b، معيار كل عدد من الأعداد العقدية التالية:

$z_1=z^2$ ؛ $z_2=2z-1$ ؛ $z_3=z+i$ ؛ $z_4=(z+i)(2z-1)$ ؛ $z_5=\frac{1-iz}{z+i}$

الحل

• تحديد معيار z_1

لدينا: $z=a+ib$ ومنه: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$، إذن: $|z_1| = |z^2| = |z|^2 = a^2+b^2$

• تحديد معيار z_2

لدينا: $z_2=2z-1=2(a+ib)-1=2a-1+2bi$

ومنه: $|z_2| = \sqrt{(2a-1)^2+(2b)^2} = \sqrt{4a^2+4b^2-4a+1}$

• تحديد معيار z_3

لدينا: $z_3=z+i=a+ib+i=a+i(b+1)$ ، ومنه: $|z_3| = \sqrt{a^2+(b+1)^2} = \sqrt{a^2+b^2+2b+1}$

• تحديد معيار z_4

لدينا: $z_4 = (z+i)(2z-1) = z_3 \times z_2$

ومنه فإن: $|z_4| = |z_3 \times z_2| = |z_3|\times|z_2| = \sqrt{(4a^2+4b^2-4a+1)(a^2+b^2+2b+1)}$

• تحديد معيار z_5

لدينا: $z_5 = \frac{1-iz}{z+i} = \frac{-i^2-iz}{z+i} = -i$، ومنه فإن: $|z_5| = |-i| = 1$



التمرين 22

لكل عدد عقدي z حيث $z=x+iy$ مع $(x;y) \in IR^2$، نضع: $z' = z - 2\bar{z} + 2$

1) حدد $Re(z')$ و $Im(z')$ بدلالة x و y

2) حل المعادلة: $z'=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

الحل

1) ليكن z من $\mathbb{C}$ بحيث $z=x+iy$ مع $(x;y) \in IR^2$

لدينا:
$$z' = z - 2\bar{z} + 2 = x + iy - 2(x - iy) + 2$$
$$= x + iy - 2x + 2iy + 2 = (-x + 2) + 3iy$$

بما أن: $-x + 2 \in IR$ و $3y \in IR$ فإن: $Re(z')=-x+2$ و $Im(z')=3y$

2) لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z'=0$

ليكن z من $\mathbb{C}$، لدينا:
$$z' = 0 \iff z - 2\bar{z} + 2 = 0$$
$$\iff (-x + 2) + 3iy = 0$$
$$\iff -x + 2 = 0 \text{ و } 3y = 0$$
$$\iff x = 2 \text{ و } y = 0$$
$$\iff z = 2$$

إذن $S = \{2\}$

التمرين 23

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين بحيث $|z_2| = |z_1| = 1$ و $z_1z_2 \neq -1$ نضع: $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$

بين أن: $Z \in IR$

الحل

لنبين أن: $Z \in IR$

لدينا:
$$\bar{Z} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1z_2}} = \frac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{1 + \bar{z_1}\bar{z_2}}$$
$$= \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1z_2}}{\frac{z_1z_2 + 1}{z_1z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2} = Z$$

(لأن: $|z_1| = 1 \Rightarrow \bar{z_1} = \frac{1}{z_1}$ و $|z_2| = 1 \Rightarrow \bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$)

ومنه: $\bar{Z} = Z$ إذن Z عدد حقيقي.

التمرين 24

ليكن Z عنصرا من $\mathbb{C}$ بحيث $Z \neq \overline{Z}$، وليكن u عدداً عقديا معياره 1 بحيث $u \neq 1$.
بين أن العدد $\dfrac{Z - u\overline{Z}}{1 - u}$ عدد حقيقي

الحل

لنبين أن العدد $\dfrac{Z - u\overline{Z}}{1 - u}$ عدد حقيقي.

نضع: $A = \dfrac{Z - u\overline{Z}}{1 - u}$

طريقة 1:

لدينا: $\overline{A} = \overline{\left(\dfrac{Z - u\overline{Z}}{1 - u}\right)}$

باستعمال خاصيات المرافق نحصل على: $\overline{A} = \dfrac{\overline{Z} - \overline{u}Z}{1 - \overline{u}}$

بما أن: $|u| = 1$ فإن: $u\overline{u} = 1$ ومنه: $\overline{A} = \dfrac{u\overline{u}\ \overline{Z} - \overline{u}Z}{u\overline{u} - \overline{u}} = \dfrac{\overline{u}(u\overline{Z} - Z)}{\overline{u}(u - 1)}$

إذن: $A = \dfrac{Z - u\overline{Z}}{1 - u} = \dfrac{u\overline{Z} - Z}{u - 1} = \overline{A}$ وبالتالي: $\overline{A} = A$ ومنه A عدد حقيقي

طريقة 2:

بما أن $|u| = 1$ فإن $u\overline{u} = 1$، ومنه: $u = \dfrac{1}{\overline{u}}$، إذن: $A = \dfrac{Z - u\overline{Z}}{1 - u} = \dfrac{Z - \frac{1}{\overline{u}}\overline{Z}}{1 - \frac{1}{\overline{u}}} = \dfrac{\overline{u}Z - \overline{Z}}{\overline{u} - 1}$

وبالتالي: $\overline{A} = \dfrac{\overline{Z} - \overline{u}Z}{1 - \overline{u}} = A$، أي أن العدد A عدد حقيقي.

التمرين 25

نعتبر في المستوى العقدي النقط التالية: $A(2)$ و $B(1 + i\sqrt{3})$ و $C(3 + i\sqrt{3})$
حدد طبيعة المثلث ABC

الحل

لدينا: $AB = |z_B - z_A| = |1 + i\sqrt{3} - 2| = |-1 + i\sqrt{3}|$
$= \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

ولدينا أيضا: $AC = |z_C - z_A| = |3 + i\sqrt{3} - 2| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$
$BC = |z_C - z_B| = |3 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |2| = 2$

ومنه: $AB=AC=BC$

إذن المثلث ABC متساوي الأضلاع.



التمرين 26

ليكن z عددا عقديا مخالفا للعدد 1، نضع: $Z = \dfrac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}$

1) حدد $Re(Z)$ و $Im(Z)$ بدلالة $Re(z)$ و $Im(z)$

2) حدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث يكون Z عددا حقيقيا.

3) حدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا.

الحل

1) لنحدد $Re(Z)$ و $Im(Z)$

نضع $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان

لدينا:

$$Z = \frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{2+x-iy}{1-x+iy}$$

$$= \frac{\big((2+x)-iy\big)\big((1-x)-iy\big)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{(2+x)(1-x)-y^2}{(1-x)^2+y^2} - i\frac{y(2+x)+y(1-x)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{-x^2-y^2-x+2}{(1-x)^2+y^2} + i\frac{-3y}{(1-x)^2+y^2}$$

إذن: $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{-x^2-y^2-x+2}{(1-x)^2+y^2}$ و $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{-3y}{(1-x)^2+y^2}$

2) لنحدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددان حقيقيا. عددا

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z حيث $z=x+iy$ مع x و y عددين حقيقيين.

لدينا: $z \neq 1$ و $\mathrm{Im}(Z)=0 \Leftrightarrow Z \in IR$

$\Leftrightarrow (x;y) \neq (1,0)$ و $y=0$

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي المحور الحقيقي محروما من النقطة $A(1;0)$.

3) لنحدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z حيث $z=x+iy$ مع x و y عددين حقيقيين.

لدينا: $z \neq 1$ و $\mathrm{Re}(Z)=0 \Leftrightarrow Z \in iIR$

$\Leftrightarrow -x^2-y^2-x+2=0$ و $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-2=0$ و $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=\frac{9}{4}$ و $(x;y) \neq (1;0)$

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي الدائرة (C) التي مركزها النقطة $\Omega\left(-\frac{1}{2};0\right)$، وشعاعها $\frac{3}{2}$، محرومة من النقطة $A(1;0)$.



التمرين 26

حدد المجموعة E في كل حالة من الحالات التالية:

1) $E = \{M(z) / |z| = z + \bar{z}\}$; 2) $E = \{M(z) / |z - 2 - i| = 3\}$

3) $E = \{M(z) / (2 - z)(i + \bar{z}) \in IR\}$; 4) $E = \{M(z) / |z + 1 - i| = |z|\}$

الحل

في جميع الأجوبة، نعتبر أن النقطة M لحقها z بحيث $z=x+iy$ مع x و y عددين حقيقيين.

1) لنحدد المجموعة E

لدينا: $M(z) \in E \Leftrightarrow |z| = z + \bar{z}$

$$M \in E \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2x \text{ و } x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x^2 \text{ و } x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow y^2 = 3x^2 \text{ و } x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (y = \sqrt{3}x \text{ و } x \geq 0) \text{ أو } (y = -\sqrt{3}x \text{ و } x \geq 0)$$

إذن E هو عبارة عن اتحاد نصفي مستقيمين معادلتاهما: $(D_1): \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}$ و $(D_2): \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}$

2) لنحدد المجموعة E

لدينا: $M(z) \in E \Leftrightarrow |z - 2 - i| = 3$

$$\Leftrightarrow |z - (2 + i)| = 3$$

نعتبر النقطة Ω ذات اللحق $z_\Omega = 2 + i$، لدينا إذن: $M(z) \in E \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = 3$

$$\Leftrightarrow \Omega M = 3$$

إذن المجموعة E هي الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;1)$ وشعاعها 3.

3) لنحدد المجموعة E

نضع: $Z = (2 - z)(i + \bar{z})$، لنكتب Z على الشكل الجبري.

لدينا:

$$Z = (2 - z)(i + \bar{z}) = (2 - x - iy)(i + x - iy)$$
$$= ((2 - x) - iy)(x + i(1 - y)) = (x(2 - x) + y(1 - y)) + i((2 - x)(1 - y) - xy)$$

ومنه:

$$M \in E \Leftrightarrow Z \in IR$$
$$\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2 - x)(1 - y) - xy = 0$$
$$\Leftrightarrow -x - 2y + 2 = 0$$

إذن E هي المستقيم الذي معادلته: $x+2y-2=0$

Scanné avec CamScanner

4) لنحدد المجموعة E:

لدينا: $M(z) \in E \Leftrightarrow |z + 1 - i| = |z|$
$\Leftrightarrow |z - (-1 + i)| = |z|$

نعتبر النقطة A ذات اللحق $z_A=-1+i$ ومنه: $M(z) \in E \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_O|$
$\Leftrightarrow AM = OM$

إذن المجموعة E هي واسط القطعة $[OA]$.

التمرين 28

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

حدد المجموعة E في كل حالة من الحالات التالية:

1) $E = \{M(z) / |\bar{z} + 3i + 2| = \sqrt{2}\}$; 2) $E = \{M(z) / |z - 2 + i| \leq 2\}$

3) $E = \left\{M(z) / \frac{z + i}{z - i} \in iIR\right\}$; 4) $E = \left\{M(z) / \frac{z - i}{z + 1} \in IR\right\}$

الحل

في جميع الأجوبة، نعتبر أن النقطة M لحقها z حيث $z=x+iy$ مع x و y عددين حقيقيين.

1) لنحدد المجموعة E

لدينا: $M(z) \in E \Leftrightarrow |\bar{z} + 3i + 2| = 2$
$\Leftrightarrow |\overline{\bar{z} + 3i + 2}| = \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow |z + 2 - 3i| = \sqrt{2}$ (لأن $|\bar{Z}| = |Z|$)
$\Leftrightarrow |z - (-2 + 3i)| = \sqrt{2}$

نعتبر النقطة A ذات اللحق $z_A=-2+3i$ ، ومنه: $M(z) \in E \Leftrightarrow |z - z_A| = \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow AM = \sqrt{2}$

إذن المجموعة E هي الدائرة (C) التي مركزها $A(-2;3)$ ، وشعاعها $\sqrt{2}$.

2) لنحدد المجموعة E

لدينا: $M(z) \in E \Leftrightarrow |z - 2 + i| \leq 2$
$\Leftrightarrow |z - (2 - i)| \leq 2$

نعتبر النقطة B ذات اللحق $z_B=2-i$ ، ومنه: $M(z) \in E \Leftrightarrow |z - z_B| \leq 2$
$\Leftrightarrow BM \leq 2$

إذن المجموعة E هي القرص الذي مركزه $B(2;-1)$ وشعاعه 2.

3) لنحدد المجموعة E

لنكن z من $\mathbb{C}$ بحيث $z \neq i$ ؛لدينا:

$$M(z) \in E \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in iIR$$
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)} = -\frac{z+i}{z-i}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = \frac{-z-i}{z-i}$$
$$\Leftrightarrow (\bar{z}-i)(z-i) = (\bar{z}+i)(-z-i)$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z} - i\bar{z} - iz - 1 = -z\bar{z} - i\bar{z} - iz + 1$$
$$\Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow |z| = 1$$
$$\Leftrightarrow OM = 1$$

إذن المجموعة E هي الدائرة المثلثية، محرومة من النقطة $A(0;1)$.

4) لنحدد المجموعة E

لنكن z من $\mathbb{C}$ بحيث $z \neq -1$ لدينا:

$$M(z) \in E \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1} \in IR$$
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-i}{z+1}\right)} = \frac{z-i}{z+1} \text{ و } z \neq -1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} = \frac{z-i}{z+1} \text{ و } z \neq -1$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z} + \bar{z} + iz + i = z\bar{z} - i\bar{z} + z - i \text{ و } z \neq -1$$
$$\Leftrightarrow z - \bar{z} - i(z+\bar{z}) - 2i = 0 \text{ و } z \neq -1$$
$$\Leftrightarrow 2iy - 2ix - 2i = 0 \text{ و } (x;y) \neq (-1,0)$$
$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \text{ و } (x;y) \neq (-1,0)$$

تذكر أن:
$Z \in IR \Leftrightarrow \overline{Z} = Z$
$Z \in iIR \Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$

إذن المجموعة E هي المستقيم (D) الذي معادلته:

$x-y+1=0$ محروما من النقطة $B(-1;0)$.

التمرين 29

لكل عدد عقدي z يخالف i، نضع: $Z = \frac{z+2}{z-i}$

1) نضع $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان

أ- حدد بدلالة x و y؛ $Re(Z)$ و $Im(Z)$

ب- حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z التي من أجلها يكون Z عددا حقيقيا.

ج- حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z التي من أجلها يكون Z عددا تخيليا صرفا.

د- حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z التي من أجلها يكون $|Z| = 1$

2) نعتبر النقطتين A و K ذات اللحقين i و 1 على التوالي.

أ- بين أن: $|Z - 1|.|z - i| = \sqrt{5}$

ب- استنتج أنه إذا كانت نقطة M لحقها z تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}(A;\sqrt{5})$ فإن النقطة M' ذات اللحق Z تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها وشعاعها.

الحل

1) أ- لنحدد $Re(Z)$ و $Im(Z)$ بدلالة x و y.

ليكن z عدداً عقديا مخالفاً للعدد i ، نضع: $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان مع $(x;y) \neq (0;1)$

لدينا:
$$Z = \frac{z+2}{z-i} = \frac{(x+2)+iy}{x+(y-1)i} = \frac{((x+2)+iy)(x-(y-1)i)}{(x+(y-1)i)(x-(y-1)i)}$$
$$= \frac{x(x+2)+y(y-1)-(x+2)(y-1)i+xyi}{x^2+(y-1)^2}$$
$$= \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2} + \left(\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}\right)i$$

إذن: $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$ و $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}$.

ب- لنحدد المجموعة: $E = \{M(z) / Z \in IR\}$

ليكن z عنصراً من $C - \{i\}$، لدينا:
$$M(z) \in E \iff Z \in IR$$
$$\iff \mathrm{Im}(Z) = 0$$
$$\iff \frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2} = 0 \text{ و } (x;y) \neq (0;1)$$
$$\iff x-2y+2 = 0 \text{ و } (x;y) \neq (0;1)$$

إذن المجموعة E هي المستقيم (D) الذي معادلته $x-2y+2=0$ محروما من النقطة $A(0;1)$.

ج- لنحدد F مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z تخيلياً صرفاً.

ليكن z عنصراً من $\mathbb{C} - \{i\}$،

لدينا:
$$M(z) \in F \iff Z \in iIR$$
$$\iff \mathrm{Re}(Z) = 0$$
$$\iff \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2} = 0 \text{ و } (x;y) \neq (0;1)$$

$\iff x^2 + y^2 + 2x - y = 0$ و $(x;y) \neq (0;1)$

$\iff (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ و $(x;y) \neq (0;1)$

إذن المجموعة F هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $\frac{\sqrt{5}}{2}$، محرومة من النقطة $A(0;1)$

د- لنحدد المجموعة $G = \{M(z) / |Z| = 1\}$

ليكن z عنصراً من $\mathbb{C} - \{i\}$،

طريقة جبرية:

$$M(z) \in G \iff |Z| = 1$$
$$\iff |z+2| = |z-i|$$
$$\iff |(x+2) + iy| = |x + (y-1)i|$$
$$\iff (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$\iff 4x + 2y + 3 = 0$$

إذن المجموعة G هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $4x+2y+3=0$.

(لاحظ أن: $A(0;1) \notin (\Delta)$)

طريقة هندسية:

لدينا: $Z = \frac{z+2}{z-i} = \frac{z-(-2)}{z-i} = \frac{z-z_B}{z-z_A}$ حيث $A(i)$ و $B(-2)$.

إذن: $Z \in G \iff |Z| = 1$ و $z \neq z_A$

$\iff |z - z_B| = |z - z_A|$ و $z \neq z_A$

$\iff BM = AM$ و $M \neq A$

إذن المجموعة G هي (Δ) واسط القطعة $[AB]$. (يمكن بعد ذلك إن شئنا، إعطاء معادلة (Δ)).

2) أ- لنبين أن $|Z-1|.|z-i| = \sqrt{5}$

ليكن z عنصراً من $\mathbb{C} - \{i\}$، لدينا:

$$|Z-1|.|z-i| = \left|\frac{z+2}{z-i} - 1\right|.|z-i| = \left|\frac{2+i}{z-i}\right|.|z-i| = \frac{|2+i|}{|z-i|} \times |z-i| = |2+i| = \sqrt{5}$$

ب) الاستنتاج

ليكن z عنصراً من $\mathbb{C} - \{i\}$،

$$M(z) \in \mathscr{C}(A;\sqrt{5}) \Rightarrow AM = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow |z-i| = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow |Z-1| = 1$$
$$\Rightarrow |z_{M'} - z_K| = 1$$
$$\Rightarrow KM' = 1$$
$$\Rightarrow M' \in \mathscr{C}'(K;1)$$

إذن، إذا كانت $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A، وشعاعها $\sqrt{5}$، فإن النقطة $M'(Z)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها K وشعاعها 1.

التمرين 30

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$، ليكن $Z=\frac{z}{1+\bar{z}}$ ، حيث: $z\in\mathbb{C}-\{-1\}$ ؛

نضع: $z=x+iy$ حيث: x و y عددان حقيقان و $(x;y)\neq(-1;0)$

نعتبر النقط $A(-1)$ و $M(Z)$ و $M'(Z)$

1) حدد $Re(Z)$ و $Im(Z)$ بدلالة x و y.

2) أ- حدد E مجموعة النقط M التي من أجلها يكون Z عدداً حقيقيا ؛

ب- أنشئ المجموعة E.

3) أ- بين أن: $Re(z)=-\frac{1}{2}\iff Z=-1$؛

ب- ليكن z من $\mathbb{C}-\{-1\}$ و $Re(z)\neq-\frac{1}{2}$

بين أن النقط A و M و M' مستقيمية.

الحل

1) • تحديد $Re(Z)$ و $Im(Z)$ بدلالة x و y

لدينا: $z=x+iy$ و $Z=\frac{z}{1+\bar{z}}$

ومنه فإن:
$$Z=\frac{x+iy}{(1+x)-iy}=\frac{(x+iy)((1+x)+iy)}{((1+x)-iy)((1+x)+iy)}$$
$$=\frac{x(1+x)-y^2+i(xy+y(1+x))}{(1+x)^2+y^2}=\frac{x^2-y^2+x+i(2xy+y)}{(1+x)^2+y^2}$$
$$=\frac{x^2-y^2+x}{(1+x)^2+y^2}+i\frac{2xy+y}{(1+x)^2+y^2}$$

إذن: $Re(Z)=\frac{x^2-y^2+x}{(1+x)^2+y^2}$ و $Im(Z)=\frac{2xy+y}{(1+x)^2+y^2}$

2) أ- تحديد المجموعة E

ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}-\{-1\}$؛ والنقطة M ذات اللحق z ؛

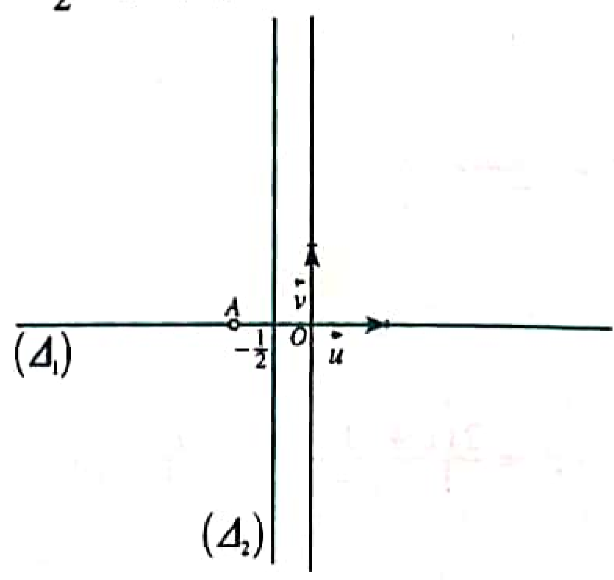
نضع $z=x+iy$ حيث: $(x;y)\in IR^2$ و $(x;y)\neq(-1;0)$

لدينا:
$$M\in E\iff Z\in IR$$
$$\iff Im(Z)=0$$
$$\iff \frac{2xy+y}{(1+x)^2+y^2}=0 \quad \text{و} \quad (x,y)\neq(-1,0)$$
$$\iff 2xy+y=0 \quad \text{و} \quad (x;y)\neq(-1,0)$$
$$\iff \left(y=0 \text{ أو } x=-\frac{1}{2}\right) \quad \text{و} \quad (x;y)\neq(-1,0)$$

ومنه المجموعة E هي اتحاد المحور الحقيقي محروما من النقطة $A(-1)$ ، والمستقيم الذي معادلته $x=-\frac{1}{2}$

ب- الإنشاء

لدينا: $E=(\Delta_1)\cup(\Delta_2)$، حيث: $(\Delta_1)=(Ox)-\{A\}$ و $(\Delta_2): x=-\frac{1}{2}$



3) أ- لنبين أن: $Z=-1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}$

ليكن z عنصراً من $\mathbb{C}$ و $z\neq -1$ ، لدينا:

$$Z=-1 \Leftrightarrow \frac{z}{1+\bar{z}}=-1$$
$$\Leftrightarrow z=-1-\bar{z}$$
$$\Leftrightarrow z+\bar{z}=-1$$
$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z)=-1$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}$$

إذن: $Z=-1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}$

ب- لنبين أن النقط A و M و M' مستقيمية.

لدينا: $\mathrm{Re}(z)\neq -\frac{1}{2}$، ومنه $Z\neq -1$ ، أي: $Z+1\neq 0$

ولدينا: $\frac{z_M-z_A}{z_{M'}-z_A}=\frac{z+1}{Z+1}$ وبما أن: $Z+1=\frac{z}{1+\bar{z}}+1=\frac{z+\bar{z}+1}{1+\bar{z}}=\frac{2\,\mathrm{Re}(z)+1}{\bar{z}+1}$

فإن: $\frac{z_M-z_A}{z_{M'}-z_A}=\frac{(z+1)(\overline{z+1})}{2\,\mathrm{Re}(z)+1}=\frac{|z+1|^2}{2\,\mathrm{Re}(z)+1}$

وبما أن: $\frac{|z+1|^2}{2\,\mathrm{Re}(z)+1}\in IR^*$ ، أي: $\frac{z_M-z_A}{z_{M'}-z_A}\in IR^*$

فإن النقط A و M و M' مستقيمية.

التمرين 31

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$

نربط كل نقطة M ذات اللحق z مخالف العدد 2 بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث: $z' = \frac{2z-4}{\bar{z}-2}$

1) احسب $|z'|$ في حالة $z=1+i$

2) لتكن $A(2)$ و $N(\bar{z})$ حيث $z \neq 2$

أ- أول هندسيا كلا من $|z-2|$ و $|\bar{z}-2|$

ب- بين أن لكل z مخالفا للعدد 2، $|z'| = 2$. ماذا يمكن أن نستنتج بالنسبة لموضع النقطة M'؟

الحل

1) لنحسب $|z'|$ في حالة $Z=1+i$

لدينا: $z' = \frac{2z-4}{\bar{z}-2}$ ومنه: $z' = \frac{2(1+i)-4}{1-i-2} = \frac{2i-2}{-1-i} = \frac{2-2i}{1+i}$

إذن: $z' = \frac{2(1-i)^2}{2} = -2i$ وبالتالي: $|z'| = |-2i| = 2$

2) أ- التأويل الهندسي

لدينا: $|z-2| = |z_M - z_A| = AM$ و $|\bar{z}-2| = |z_N - z_A| = AN$

ب- ليكن $z \in \mathbb{C} - \{2\}$ ، لدينا:

$|z'| = \left|\frac{2z-4}{\bar{z}-2}\right| = \frac{|2(z-2)|}{|\bar{z}-2|} = 2\frac{|z-2|}{|\bar{z}-2|}$ ومنه: $|z'| = 2\frac{AM}{AN}$

بما أن M و N متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي، و A نقطة من المحور الحقيقي فإن $AM=AN$

ومنه $|z'| = 2$

طريقة 2: نعلم أن: $|\bar{z}| = |z|$ ومنه: $|z-2| = |\overline{z-2}| = |\bar{z}-2|$

$|z'| = \frac{2|z-2|}{|\bar{z}-2|} = 2$ (لأن: $|z-2| = |\bar{z}-2| \neq 0$)

استنتاج : بما أن: $|z'| = 2$ فإن: $OM'=2$

وهذا يعني أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وشعاعها 2.

التمرين 32

1) بين أن: $(\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ |z+1|^2 + |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$

2) استنتج مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$

الحل

1) لنبين أن: $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4} \Longleftrightarrow |z+1|^2+|z|^2=1$

ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}$، لدينا:

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4} \Longleftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}+\bar{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Longleftrightarrow z\bar{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\bar{z}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Longleftrightarrow |z|^2+\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$$

$$\Longleftrightarrow z+\bar{z}=-2|z|^2 \quad (1)$$

ولدينا:

$$|z+1|^2+|z|^2=1 \Longleftrightarrow (z+1)\overline{(z+1)}+z\bar{z}=1$$

$$\Longleftrightarrow (z+1)(\bar{z}+\bar{1})+z\bar{z}=1$$

$$\Longleftrightarrow z\bar{z}+z+\bar{z}+1+z\bar{z}=1$$

$$\Longleftrightarrow z+\bar{z}+2z\bar{z}=0$$

$$\Longleftrightarrow z+\bar{z}=-2|z|^2 \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4} \Longleftrightarrow |z+1|^2+|z|^2=1$

2) لنحدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $|z+1|^2+|z|^2=1$

ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}$ و $A\left(-\frac{1}{2}\right)$، لدينا:

$$|z+1|^2+|z|^2=1 \Longleftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \left|z-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow |z-z_A|=\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow AM=\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow M(z)\in C\left(A\left(-\frac{1}{2}\right);\frac{1}{2}\right)$$

إذن مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|z+1|^2+|z|^2=1$ هي الدائرة التي مركزها $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R=\frac{1}{2}$